EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 06_6

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES. AUTOVALORES REPETIDOS

AUTOVALORES REPETIDOS

INTRODUÇÃO

Vamos concluir nossa discussão do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ analisando o caso em que a matriz $\mathbf{A}$ tem autovalores repetidos (reais e complexos)

Lembre que vimos, na aula 06_3 (slides 31 e 32), que um autovalor repetido com multiplicidade algébrica $m \geq 2$ pode ter multiplicidade geométrica menor do que m. Em outras palavras, pode ter menos do que m autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor.

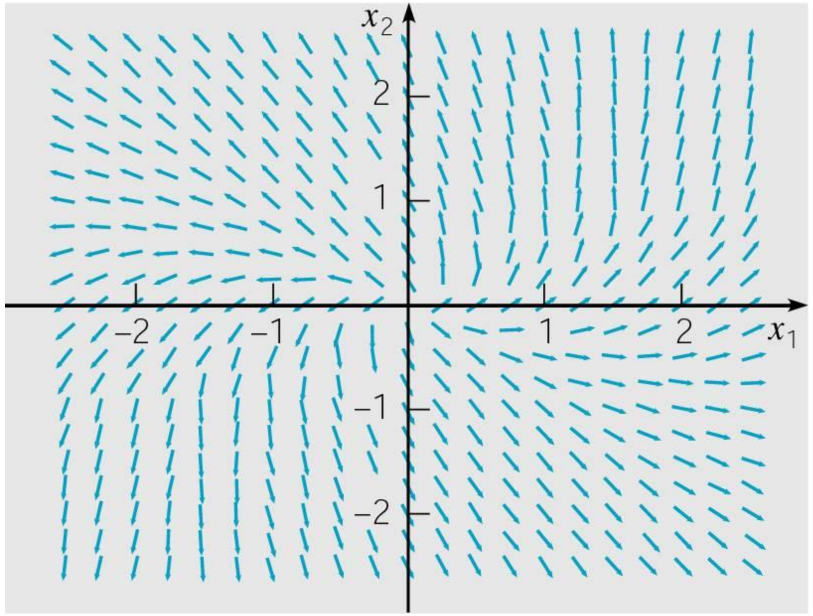
O exemplo a seguir ilustra essa possibilidade.

EXEMPLO 1

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

O campo de direções é...



Substituindo $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ em $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e rescrevendo o sistema como $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ obtemos a equação para os autovalores r e também para os autovetores $\boldsymbol{\xi}$ ...

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 1

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \mathrm{r}\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = (r-1)(r-3) + 1 = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$$

Assim, os dois autovalores são $r_1 = 2$ e $r_2 = 2$, ou seja, o autovalor 2 tem multiplicidade algébrica 2.

Para determinar os autovetores, substituímos os autovalores na equação...

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 1

Para o autovalor 2 encontramos...

$$(\mathbf{A}-r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando nas linhas e resolvendo obtemos uma única equação:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{array}{rrr} 1\xi_1 & +1\xi_2 & =0 \\ & 0\xi_2 & =0 \end{array}$$

...portanto, uma única condição $\xi_1 + \xi_2 = 0$, que determina ξ_2 em função de ξ_1, ou vice-versa. Então, um autovetor (para c=1) associado ao autovalor r = 2 é:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}=\begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(escolhendo c=}-1\text{)} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou qualquer múltiplo não nulo desse vetor. Note que existe apenas um autovetor linearmente independente associado a esse autovalor duplo.

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 1

Desta forma a solução $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ procurada, de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é:

$$\boxed{\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}}$$

Como não há uma segunda solução da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ temos que tentar outra forma, mas não temos certeza se existe esta segunda solução independente, lembrando que:

Se $r = r_1$ é uma raiz de multiplicidade m da equação característica $\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I})$ então r_1 é um autovalor de <u>multiplicidade algébrica m</u> da matriz **A**.

Nesse caso, <u>existem duas possibilidades</u>: ou existem m autovetores linearmente independentes associados ao autovalor r_1, ou existem menos do que m desses autovetores.

Ainda lembrando a aula 06_3...

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 1

No primeiro caso, sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(m)}$ os m autovetores linearmente independentes associados (todos eles) ao autovalor r_1 de multiplicidade algébrica m.

Então existem m soluções linearmente independentes $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(k)}e^{r_1 t}$.

Assim, nesse caso, não faz diferença que o autovalor $r = r_1$ seja repetido, pois neste caso, ainda existe um conjunto fundamental de soluções da forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$.

Esse caso sempre ocorrerá quando a matriz de coeficientes da matriz **A** for hermitiana (ou real e simétrica, chamada também de autoadjunta).

Mas, e no segundo caso...

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 1

Se a matriz de coeficientes **A** não for autoadjunta, então podem existir menos do que m vetores linearmente independentes associados ao autovalor r_1 de multiplicidade algébrica m e, nesse caso, haverá menos do que m soluções da forma $\boldsymbol{\xi}e^{r_1 t}$ associadas a esse autovalor r_1.

Portanto, para construir a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, é preciso encontrar as outras soluções com estruturas diferentes de $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$.

Lembre que uma situação semelhante ocorreu na aula 03_3 (slide 11) para a equação linear $ay''+by'+cy=0$ quando a equação característica tinha uma raiz dupla r.

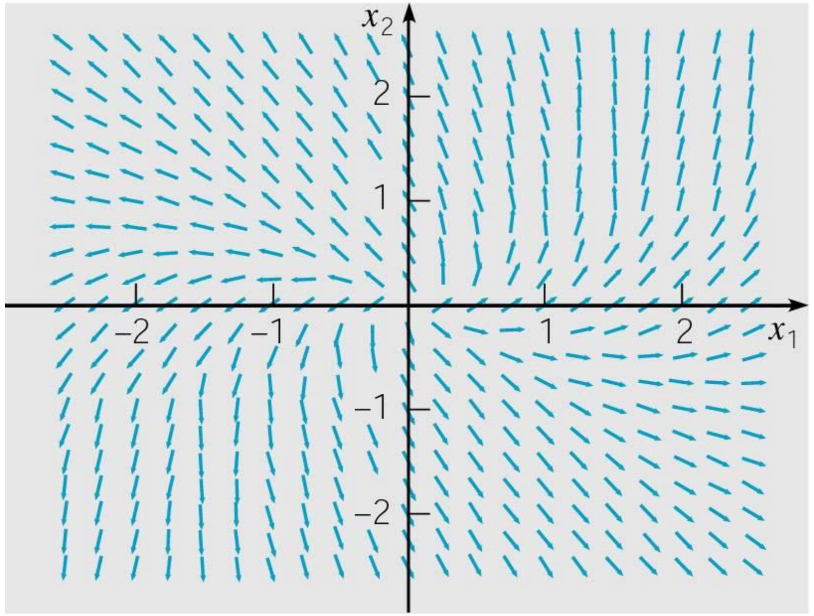
Naquele caso encontramos uma solução exponencial $y_1(t) = e^{rt}$, mas uma segunda solução independente tinha a forma $y_2(t) = te^{rt}$. Com esse resultado em mente, vamos considerar o exemplo a seguir:

EXEMPLO 2

Encontre o conjunto fundamental de soluções do exemplo 1 e desenhe um retrato de fases para esse sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Como já vimos no campo de direções, parece que todas as soluções não nulas se afastam da origem...



Sabemos que r = 2 é um autovalor duplo que tem um único autovetor associado independente, que podemos escolhemos como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E sabemos que uma solução é $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$ e que não existe outra com esta forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$.

EXEMPLO 2

Com base no procedimento usado para equações lineares de segunda ordem na aula 03_3 (slide 11) parece natural tentar encontrar uma segunda solução na forma t $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$

Neste caso o autovetor **ξ** não está determinado, **ξ** é um vetor constante a ser encontrado. Substituindo **x** = $\boldsymbol{\xi}te^{2t}$ na nossa equação **x′** = **A x** obtemos

$$\boldsymbol{\xi}e^{2t} + 2\boldsymbol{\xi}te^{2t} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi}te^{2t} \qquad\qquad 2\boldsymbol{\xi}te^{2t} + \boldsymbol{\xi}e^{2t} - \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}te^{2t} = 0$$

Para que seja satisfeita a igualdade a zero para todo t, é necessário que os coeficientes de te^{2t} e de e^{2t} sejam nulos.

Do termo e^{2t}, vemos que **ξ=0**

Então não existe solução não nula deste sistema **x′** = **A x** na forma **x** = $\boldsymbol{\xi}te^{2t}$

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 2

Como $2\boldsymbol{\xi}te^{2t} + \boldsymbol{\xi}e^{2t} - \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}te^{2t} = 0$ contém termos em te^{2t} e e^{2t}, parece que, além de $\boldsymbol{\xi}te^{2t}$, a segunda solução tem que conter, também, um termo da forma $\boldsymbol{\eta}e^{2t}$ (para poder zerar o coeficiente perante o exponencial e^{2t} sem zerar o autovetor) em outras palavras, precisamos supor que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}te^{2t} + \boldsymbol{\eta}e^{2t}$$

em que $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ são vetores constantes que deverão ser determinados.

Novamente testamos esta opção, substituindo $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}te^{2t} + \boldsymbol{\eta}e^{2t}$ na nossa equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ ...

$$\boldsymbol{\xi}e^{2t} + 2\boldsymbol{\xi}te^{2t} + 2\boldsymbol{\eta}e^{2t} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}te^{2t} + \boldsymbol{\eta}e^{2t})$$

$$2\boldsymbol{\xi}te^{2t} + (\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\eta})e^{2t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}te^{2t} + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}e^{2t}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 2

Obtivemos...
$$2\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + (\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\eta})e^{2t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} e^{2t}$$

Igualando os coeficientes de te^{2t} e de e^{2t} de cada lado encontramos que $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = 2\boldsymbol{\xi}$ and $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\eta}$ ou escrito de outra forma:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$$

A equação para $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ será satisfeita se $\boldsymbol{\xi}$ for um autovetor de **A** associado ao autovalor r = 2, ou seja, $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vamos resolver agora a equação $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$ operando na matriz estendida...

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \eta_2 = -1 - \eta_1 \to \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ -1 - \eta_1 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 2

então, substituindo **ξ** e **η** na nossa proposta de solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} te^{2t} + \boldsymbol{\eta} e^{2t}$ obtemos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

O último termo é, simplesmente, um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ que era $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathrm{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$ e portanto já está contemplado nela e pode ser ignorado, mas os dois primeiros termos constituem uma nova solução:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 2

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Um cálculo elementar mostra que W[$\mathbf{x}^{(1)}$,$\mathbf{x}^{(2)}$](t) não se anula nunca...

$$W\left[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\right](t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & te^{2t} - e^{2t} \end{vmatrix} = -e^{4t} \neq 0$$

portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
A solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}\right]$$

Vamos agora ver o comportamento desta solução geral...

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 2

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

As principais características do retrato de fase para esta solução **x** são consequências da presença do fator exponencial e^{2t} em todos os termos.

Portanto, quando $t \to -\infty$ a solução $\mathbf{x} \to 0$ e, a menos que ambos c_1 e c_2 sejam nulos, quando $t \to \infty$ **x** torna-se ilimitada.

Se c_1 e c_2 não forem ambos nulos, então, ao longo de qualquer trajetória, teremos:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{-c_1 - c_2t - c_2}{c_1 + c_2t} = -1$$

Portanto, quando $t \to -\infty$, todas as trajetórias se aproximam da origem e são tangentes à reta $x_2 = -x_1$ determinada pelo autovetor... e quando $t \to \infty$, a inclinação de cada trajetória também se aproxima de -1....vejamos a figura....

AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 2

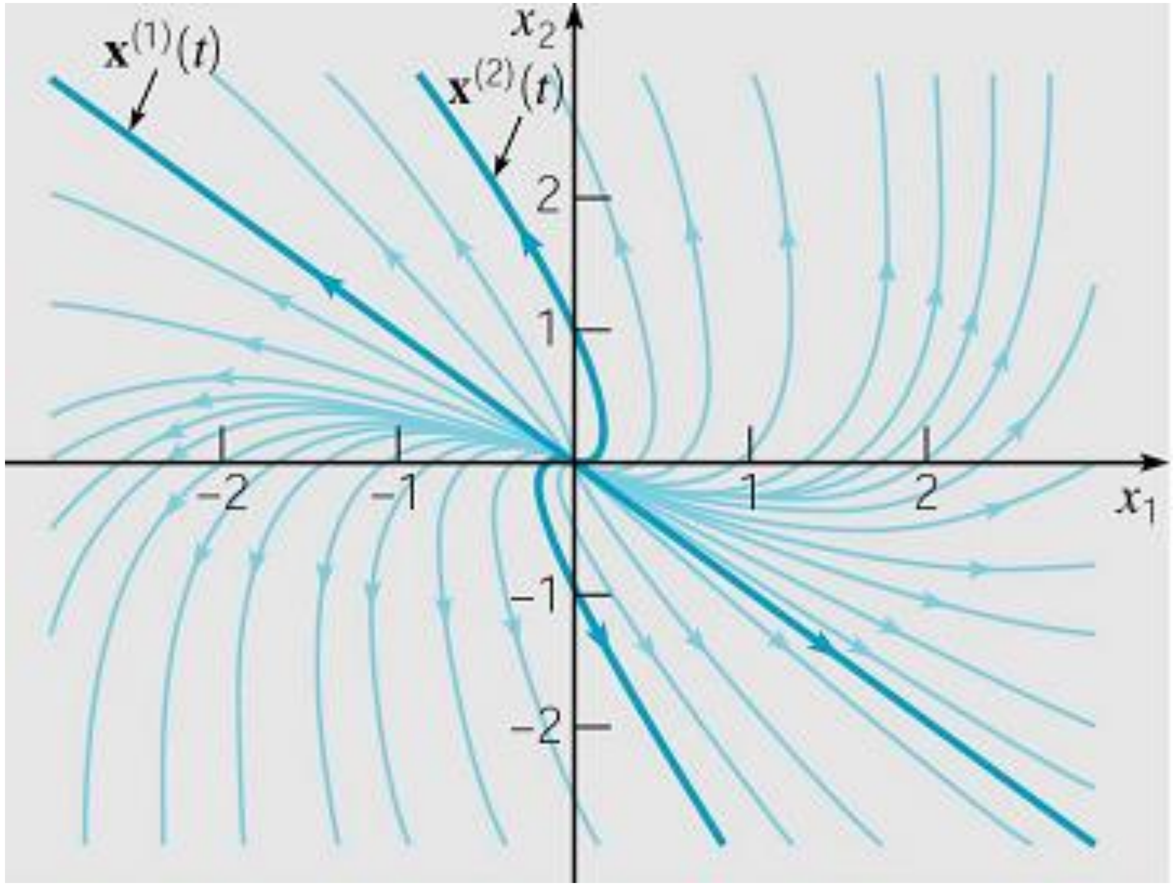
$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

Quando $t \to -\infty$, todas as trajetórias se aproximam da origem e são tangentes à reta $x_2 = -x_1$.

Quando $t \to \infty$, a inclinação de cada trajetória também se aproxima de –1.

No entanto, é possível mostrar que as trajetórias não se aproximam de assíntotas quando $t \to \infty$ (somente se tornam paralelas a $x_2 = -x_1$).

O padrão de trajetórias nessa figura é típico de sistemas (2×2) $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ com autovalores iguais e apenas um autovetor independente.



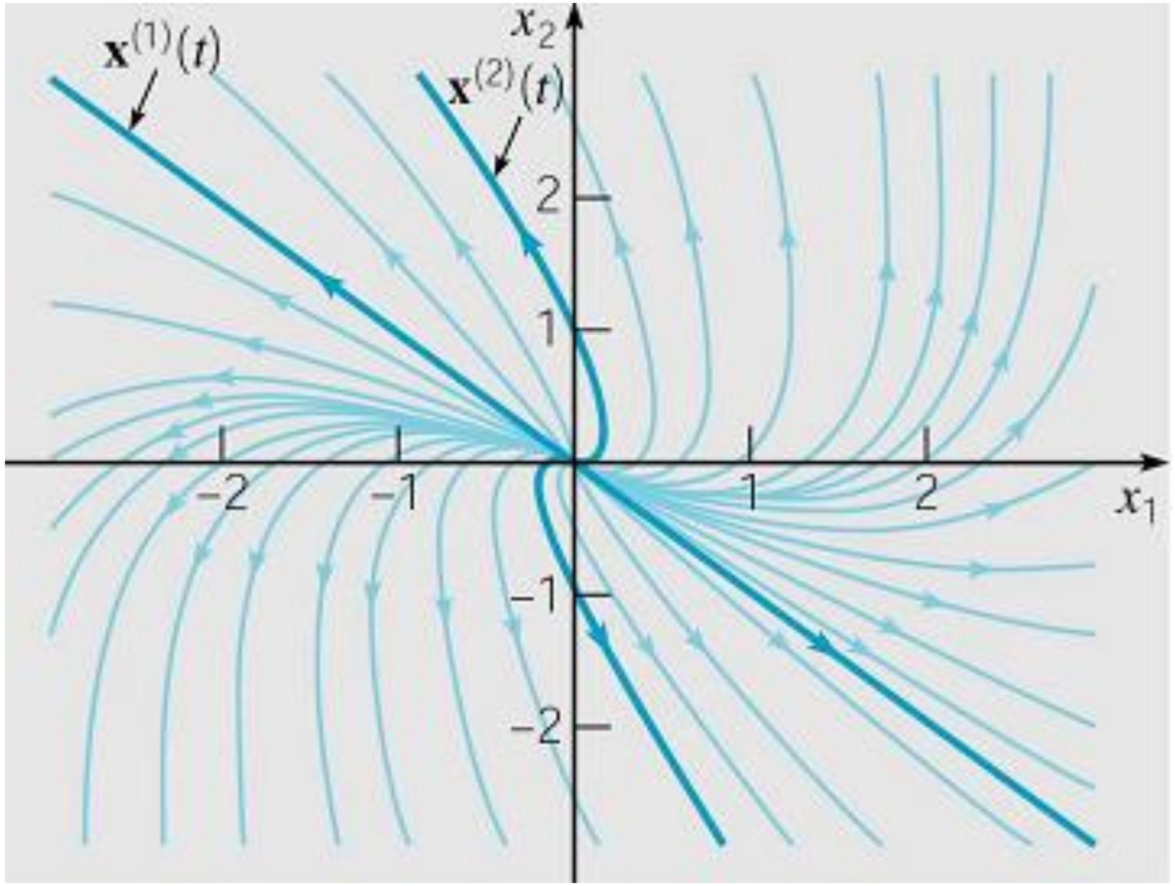
EXEMPLO 2

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

Neste caso a origem é chamada de **nó impróprio** e é instável (autovalores positivos)

Se os autovalores forem negativos, então as trajetórias serão semelhantes, mas percorridas em sentido oposto e o nó será improprio e assintoticamente estável.

Vejamos agora os gráficos em função do tempo, por exemplo de x_1

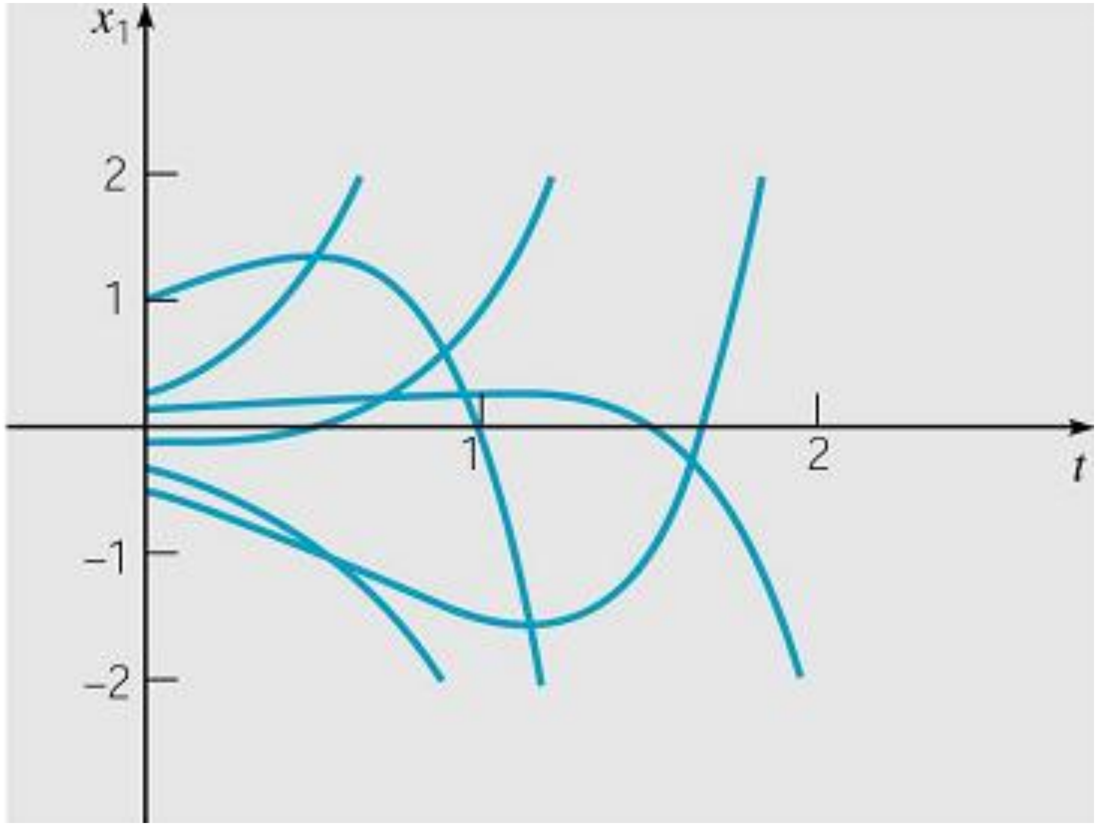


AUTOVALORES REPETIDOS

EXEMPLO 2

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

Gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na figura ao lado...



Lembrem que a solução acima pode ser reescrita também da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1e^{2t} + c_2te^{2t}\\-(c_1+c_2)e^{2t} - c_2te^{2t}\end{pmatrix}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

CASO GERAL

Vamos supor que o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tem um autovalor $r = \rho$ que é um autovalor duplo de $\mathbf{A}$, mas que tem apenas um autovetor associado independente $\boldsymbol{\xi}$.
Então a primeira solução é:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \xi e^{\rho t}$$

em que ξ satisfaz:

$$(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$$

Procedendo como no Exemplo 2, vemos que uma segunda solução é

$$\mathbf{x}^{(2)} = \xi t e^{\rho t} + \boldsymbol{\eta} e^{\rho t}$$

em que η é determinado por:

$$(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\,\boldsymbol{\eta} = \xi$$

AUTOVALORES REPETIDOS

CASO GERAL

Embora det($\mathbf{A}$ – ρ$\mathbf{I}$) = 0, pode-se mostrar que é sempre possível resolver a equação $(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \xi$ para $\boldsymbol{\eta}$

A dúvida sobre a existência da solução dessa equação poderia surgir do fato de que se ρ é um autovalor, e portanto det($\mathbf{A}$ – ρ$\mathbf{I}$)=0, então sabemos que ($\mathbf{A}$ – ρ$\mathbf{I}$)=b não tem solução para todo b. Mas no nosso caso pode ser mostrado (não é feito aqui) que $(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \xi$ **sempre tem solução**.

Note que, se multiplicarmos ambos termos de $(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \xi$ por ($\mathbf{A}$ – ρ$\mathbf{I}$) e usarmos o fato de que $(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$ obteremos

$$(\mathbf{A}-\rho\mathbf{I})^2\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$$

O vetor η é conhecido como de autovetor generalizado da matriz A, associado ao autovalor ρ.

MATRIZES FUNDAMENTAIS

Como explicado na aula 06_5, matrizes fundamentais são formadas colocando-se soluções linearmente independentes em colunas.

No exemplo 1 nosso sistema **x**´=**Ax** foi: $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

e as duas soluções encontradas foram: $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

Portanto a matriz fundamental correspondente ao sistema **x**´=**Ax** é:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t - 1 \end{pmatrix}$$

Como encontrar a matriz fundamental especial **Φ** que satisfaz **Φ**(0) = **I** ?

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MATRIZES FUNDAMENTAIS

A matriz fundamental especial $\mathbf{\Phi}$ que satisfaz $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ pode ser imediatamente encontrada através da relação $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(0)$ em que:

$$\mathbf{\Psi}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Psi}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz $\mathbf{\Psi}^{-1}(0)$ foi encontrada assim: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Assim encontramos $\mathbf{\Phi}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & t+1 \end{pmatrix}$

Esta última matriz é também a matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$

FORMAS DE JORDAN

Como vimos na aula 06_5, uma matriz **A** (n×n) só pode ser diagonalizada se tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes.
Se existirem menos autovetores (devido a autovalores repetidos), então **A** sempre pode ser transformada em uma matriz **J** quase diagonal denominada "forma canônica de Jordan" que tem os autovalores de **A** em sua diagonal principal, o número 1 em determinadas posições acima da diagonal principal e o número 0 em todos os outros lugares.

Vamos mostrar isso no caso da matriz **A** dada para o sistema do exemplo 1

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Com os autovalores $r_1 = r_2 = 2$ e autovetores:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

FORMAS DE JORDAN

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para transformar **A** na sua “forma canônica de Jordan”, construímos a matriz de semelhança **T** com o único autovetor **ξ** na sua primeira coluna e com o autovetor generalizado **η** (com k = 0) na segunda coluna

Então, **T** e sua inversa são dadas por
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto segue que
$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz **J** é a “forma canônica de Jordan” da matriz **A**.
Ela é típica de todas as formas de Jordan por ter o número 1 acima da diagonal principal na coluna correspondente ao autovetor que está faltando (e que foi substituído em **T** pelo autovetor generalizado).

AUTOVALORES REPETIDOS

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço