Conjunto de problemas 2.6

1. As soluções para a equação linear diferencial $d^2u/dt^2 = u$ formam um espaço vetorial (já que as combinações das soluções ainda são soluções). Encontre duas soluções independentes para fornecer uma base a esse espaço da solução.

2. No espaço $\mathbf{P}_3$ de polinômios cúbicos, que matriz representa d^2/dt^2? Construa a matriz 4 por 4 a partir da base padrão $1, t, t^2, t^3$. Encontre seu espaço nulo e seu espaço-coluna. O que eles significam em termos de polinômios?

3. Com os valores iniciais $u = x$ e $du/dt = y$ em $t = 0$, qual combinação de vetores-bases do Problema 1 resolve $u'' = u$? Essa transformação, a partir dos valores iniciais da solução, é linear. Qual é sua matriz 2 por 2 (utilizando $x = 1, y = 0$ e $x = 0, y = 1$ como base de $\mathbf{V}$ e sua base de $\mathbf{W}$)?

4. Suponha que A seja uma transformação linear do plano xy nele mesmo. Por que $A^{-1}(x + y) = A^{-1}x + A^{-1}y$? Se A é representada pela matriz M, explique por que A^{-1} é representada por M^{-1}.

5. Quais matrizes 3 por 3 representam a transformação que

(a) projeta todo vetor sobre o plano xy?

(b) reflete todo vetor em relação ao plano xy?

(c) gira o plano xy em 90°, deixando apenas o eixo z?

(d) gira o plano xy, em seguida, o plano xz e, por fim, o yz em 90°?

(e) realiza as mesmas três rotações, ma

6. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gera uma ***extensão*** na direção x. Desenhe a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e esboce ao redor dela os pontos $(2x, y)$ que resultam da multiplicação por A. Qual é o formato dessa curva?

7. Verifique diretamente a partir de $c^2 + s^2 = 1$ que as matrizes de reflexão satisfazem $H^2 = I$.

8. Toda linha reta permanece reta após uma transformação linear. Se z está na metade da distância entre x e y, mostre que Az está na metade da distância entre Ax e Ay.

9. Que matriz tem o efeito de girar todo vetor em 90° e, em seguida, projetar o resultado sobre o eixo x? Que matriz representa a projeção sobre o eixo x seguida da projeção sobre o eixo y?

10. O produto de 5 reflexões e 8 rotações do plano xy gera uma rotação ou uma reflexão?

11. De $\mathbf{P}_3$ do terceiro grau ao polinômio $\mathbf{P}_4$ do quarto grau, que matriz representa a multiplicação $2 + 3t$? As colunas da matriz A 5 por 4 decorrem da aplicação da transformação em $1, t, t^2, t^3$.

12. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ resulta em uma transformação de ***encurtamento***, que deixa o eixo y inalterado. Esboce seu efeito sobre o eixo x, indicando o que acontece a $(1, 0)$, $(2, 0)$ e $(-1, 0)$ – e como o eixo inteiro é transformado.

13. O produto $(AB)C$ de transformações lineares começa com um vetor x e produz $u = Cx$. Então, a regra 2V aplica AB a u e obtém $(AB)Cx$.

(a) Esse resultado é o mesmo que o da aplicação separada de C, seguido de B e, finalmente, de A?

(b) O resultado é o mesmo da aplicação de BC seguida de A? Os parênteses são desnecessários e a propriedade associativa $(AB)C = A(BC)$ se mantém para transformações lineares. Esta é a melhor prova desta propriedade de matrizes.

14. No espaço vetorial P_3 de todos os $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, considere que **S** seja o subconjunto dos polinômios com $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$. Verifique que **S** é um subespaço e encontre uma base.

15. Qual é o eixo e o ângulo de rotação para a transformação que leva de (x_1, x_2, x_3) a (x_2, x_3, x_1)?

16. Se S e T são lineares com $S(v) = T(v) = v$, então $S(T(v)) = v$ ou v^2?

17. Quais dessas transformações satisfazem $T(v + w) = T(v) + T(w)$ e quais satisfazem $T(cv) = cT(v)$?

(a) $T(v) = v/\|v\|$.
(b) $T(v) = v_1 + v_2 + v_3$.
(c) $T(v) = (v_1, 2v_2, 3v_3)$.
(d) $T(v) =$ maior componente de v.

18. O espaço de todas as matrizes 2 por 2 possui quatro "vetores"-bases:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para a transformação linear de *transposição*, encontre a matriz A relacionada a essa base. Por que $A^2 = I$?

19. Uma transformação linear deve ter o vetor zero fixado: $T(0) = 0$. Prove isto a partir de $T(v + w) = T(v) + T(w)$, escolhendo $w =$ a partir da hipótese $T(cv) = cT(v)$, escolhendo $c =$ _______.

20. Qual dessas transformações não é linear? O vetor original dado é $v = (v_1, v_2)$.

(a) $T(v) = (v_2, v_1)$.
(b) $T(v) = (v_1, v_1)$.
(c) $T(v) = (0, v_1)$.
(d) $T(v) = (0, 1)$.

21. Encontre a matriz de permutação cíclica 4 por 4: (x_1, x_2, x_3, x_4) é transformado em $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_1)$. Qual é o efeito de A^2? Mostre que $A^3 = A^{-1}$.

22. Suponha que $T(v) = v$, exceto que $T(0, v_2) = (0, 0)$. Mostre que essa transformação satisfaz $T(cv) = cT(v)$, mas não $T(v + w) = T(v) + T(w)$.

23. Uma transformação *não linear* é invertível se $T(x) = b$ possuir exatamente uma solução para todo b. O exemplo $T(x) = x^2$ não é invertível, pois $x^2 = b$ possui duas soluções para b positivo e nenhuma solução para b negativo. Quais das seguintes transformações (de números reais $\mathbf{R}^1$ a números reais $\mathbf{R}^1$) são invertíveis? Nenhuma é linear, nem mesmo (c).

(a) $T(x) = x^3$.
(b) $T(x) = e^x$.
(c) $T(x) = x + 11$.
(d) $T(x) = \cos x$.

24. Encontre a matriz A 4 por 3 que represente um *desvio à direita*: (x_1, x_2, x_3) é transformado em $(0, x_1, x_2, x_3)$. Encontre também a matriz B de *desvio à esquerda que* parta de $\mathbf{R}^4$ e retorne a $\mathbf{R}^3$, transformando (x_1, x_2, x_3, x_4) em (x_2, x_3, x_4). Quais são os produtos AB e BA?

25. Prove que T^2 é uma transformação linear se T for linear (de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$).

26. A transformação "cíclica" T é definida por $T(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1)$. O que é $T(T(T(v)))$? E $T^{100}(v)$?

27. Suponha que uma linear T transforme $(1, 1)$ em $(2, 2)$ e $(2, 0)$ em $(0, 0)$. Encontre $T(v)$ quando:

(a) $v = (2, 2)$. (b) $v = (3, 1)$. (c) $v = (-1, 1)$. (d) $v = (a, b)$.

28. Uma transformação linear de $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ possui uma *inversa* de $\mathbf{W}$ a $\mathbf{V}$ quando a imagem é toda de $\mathbf{W}$ e o núcleo contém apenas $v = 0$. Por que as transformações abaixo não são invertíveis?

(a) $T(v_1, v_2) = (v_2, v_2)$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^2$

(b) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_2, v_1 + v_2)$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^3$

(c) $T(v_1, v_2) = v_1$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^1$.

29. Para as seguintes transformações de $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ a $\mathbf{W} = \mathbf{R}^2$, encontre $T(T(v))$.

(a) $T(v) = -v$.

(b) $T(v) = v + (1, 1)$.

(c) $T(v) =$ rotação de $90° = (-v_2, v_1)$.

(d) $T(v) =$ projeção $= \left(\dfrac{v_1 + v_2}{2}, \dfrac{v_1 + v_2}{2}\right)$.

30. Encontre a *imagem* e o *núcleo* (estes são termos novos para o espaço-coluna e o espaço nulo) de T.

(a) $T(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. (b) $T(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2)$.

(c) $T(v_1, v_2) = (0, 0)$. (d) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_1)$.

Os Problemas 31 a 35 podem ser mais difíceis. O espaço original V contém todas as matrizes M 2 por 2.

31. Suponha que T transponha toda matri matriz A que forneça $AM = M^{\mathrm{T}}$ para toda M. Mostre que nenhuma matriz A fará isso. *Para professores*: esta é uma transformação linear que não decorre de uma matriz?

32. Suponha que $T(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [\,M\,] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre uma matriz com $T(M) \neq 0$. Descreva todas as matrizes com $T(M) = 0$ (o núcleo de T) e todas as matrizes resultantes $T(M)$ (a imagem de T).

33. M é qualquer matriz 2 por 2 e $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. A transformação linear T é definida por $T(M) = AM$. Que regras de multiplicação de matrizes mostram que T é linear?

34. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Mostre que a matriz identidade I não está na imagem de T. Encontre uma matriz não nula M, tal que $T(M) = AM$ seja nula.

35. A transformação T que transpõe toda matriz é definitivamente linear. Quais dessas propriedades adicionais são verdadeiras?

(a) $T^2 =$ transformação identidade.

(b) O núcleo de T é a matriz nula.

(c) Toda matriz está na imagem de T.

(d) $T(M) = -M$ é impossível.

Os próximos problemas abordam mudança de base.

36. (a) Que matriz transforma $(1, 0)$ em $(2, 5)$ e $(0, 1)$ em $(1, 3)$?

(b) Que matriz transforma $(2, 5)$ em $(1, 0)$ e $(1, 3)$ em $(0, 1)$?

(c) Por que nenhuma matriz transforma $(2, 6)$ em $(1, 0)$ e $(1, 3)$ em $(0, 1)$?

37. Suponha que T seja a reflexão em relação ao eixo x e S a reflexão em relação ao eixo y. O domínio **V** é o plano xy. Se $v = (x, y)$, qual é $S(T(v))$? Encontre uma descrição mais simples do produto ST.

38. A *matriz de Hadamard* 4 por 4 é composta inteiramente por $+1$ e -1:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre H^{-1} e apresente $v = (7, 5, 3, 1)$ como uma combinação das colunas de H.

39. Quais são as três equações de A, B, C se a parábola $Y = A + Bx + Cx^2$ for igual a 4 em $x = a$, 5 em $x = b$ e 6 em $x = c$? Encontre o determinante da matriz 3 por 3. Para quais dos números a, b, c será impossível encontrar essa parábola Y?

40. Suponha que v_1, v_2, v_3 são autovetores de T. Isso significa que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, 3$. Qual é a matriz para T quando as bases originais e finais são valores v?

41. Mostre que o produto ST de duas reflexões é uma rotação. Multiplique essas matrizes de reflexão para encontrar o ângulo de rotação:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

42. Se você mantiver os mesmos vetores-bases, [...]m diferente, a matriz de mudança de base M será uma matriz _ os vetores-bases na ordem, mas alterar seus módulos, M será uma matriz _______.

43. Suponha que T seja uma reflexão em relação à reta de 45° e S, uma reflexão em relação ao eixo y. Se $v = (2, 1)$, então $T(v) = (1, 2)$. Encontre $S(T(v))$ e $T(S(v))$. Isso mostra que, em geral, $ST \neq TS$.

44. (a) Que matriz M transforma $(1, 0)$ e $(0, 1)$ em (r, t) e (s, u)?

(b) Que matriz N transforma (a, c) e (b, d) em $(1, 0)$ e $(0, 1)$?

(c) Que condição de a, b, c, d tornará o item (b) impossível?

45. A matriz que transforma $(1, 0)$ e $(0, 1)$ em $(1, 4)$ e $(1, 5)$ é $M =$ _______. A combinação $a(1, 4) + b(1, 5)$ que é igual a $(1, 0)$ possui $(a, b) = (\quad , \quad)$. Como essas novas coordenadas de $(1, 0)$ estão relacionadas a M e M^{-1}?

46. (a) Como M e N do problema 37 resultam na matriz que transforma (a, c) em (r, t) e (b, d) em (s, u)?

(b) Que matriz transforma $(2, 5)$ em $(1, 1)$ e $(1, 3)$ em $(0, 2)$?

47. Toda transformação linear invertível pode ter I como sua matriz. Para a base resultante, escolha apenas $w_i = T(v_i)$. Por que T deve ser invertível?

48. Suponha que tenhamos duas bases $v_1, \ldots, v_n$ e $w_1, \ldots, w_n$ de $\mathbf{R}^n$. Se um vetor possui coeficientes b_i em uma base e c_i em outra, qual é a matriz de mudança de base de $b = Mc$? Comece com

$$b_1v_1 + \ldots + b_nv_n = Vb = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n = Wc.$$

Sua resposta representa $T(v) = v$ com a base original de valores de v e a base resultante de valores de w. Devido às bases diferentes, a matriz não é I.

49. (Recomendado) Suponha que todos os vetores x no quadrado unitário $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$ sejam transformados em Ax (A é 2 por 2).

(a) Qual é o formato da região transformada (todo Ax)?

(b) Para quais matrizes A essa região é quadrada?

(c) Para quais A ela é uma reta?

(d) Para quais A a nova área ainda é 1?

50. Verdadeiro ou falso: se conhecermos $T(v)$ para n diferentes vetores não nulos em $\mathbf{R}^n$, então conheceremos $T(v)$ para todo vetor em $\mathbf{R}^n$.