Conjunto de problemas 1.6

1. Suponha que a eliminação falhe porque não há pivô na coluna 3:

$$\textbf{Falta de pivô} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Mostre que A não pode ser invertível. A terceira linha de A^{-1}, multiplicando A, deveria resultar na terceira linha $[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$ de $A^{-1}A = I$. Por que isso é impossível?

2. Se a inversa de A^2 for B, mostre que a inversa de A é AB (assim, A é invertível sempre que A^2 for invertível).

3. Encontre três matrizes 2 por 2 diferentes de $A = I$ e $A = -I$ que sejam suas próprias inversas: $A^2 = I$.

4. Encontre (por qualquer modo válido) as inversas de:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$$

5. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ não possui inversa, resolvendo $Ax = 0$ e mostrando que há falha na resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. (a) Se A é invertível e $AB = AC$, prove de modo breve que $B = C$.

(b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, encontre um exemplo com $AB = AC$ e $B \neq C$.

7. (a) Encontre as inversas das matrizes de permutação:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Quanto às permutações, explique por que P^{-1} *é sempre igual a* P^{T}. Mostre que os números 1 ficam no lugar certo para se obter $PP^{\mathrm{T}} = I$.

]

8. A partir de $AB = C$, encontre uma fórmula para A^{-1}. Encontre também A^{-1} a partir de $PA = LU$.

9. Encontre as inversas (não é necessário nenhum sistema especial) de:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

10. Utilize o método de Gauss-Jordan para inverter:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Se B for quadrada, mostre que $A = B + B^{\mathrm{T}}$ é sempre simétrica e $K = B - B^{\mathrm{T}}$ é sempre *antissimétrica* – o que significa que $K^{\mathrm{T}} = -K$. Encontre essas matrizes A e K, se $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, e apresente B como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.

12. Calcule a fatoração simétrica LDL^{T} de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

13. (a) Se $A = LDU$, com apenas 1 nas diagonais de L e U, qual é a fatoração correspondente de A^{T}? Observe que A e A^{T} (matrizes quadradas sem trocas de linhas) compartilham alguns pivôs.

(b) Que sistemas triangulares fornecerão a solução para $A^{\mathrm{T}}y = b$?

14. Encontre a inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Sob quais condições em seus elementos A e B são invertíveis?

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

16. Se $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcule $A^{\mathrm{T}}B$, $B^{\mathrm{T}}A$, AB^{T} e BA^{T}.

17. Dê exemplos de A e B de modo que:

(a) $A + B$ não seja invertível, embora A e B sejam invertíveis.

(b) $A + B$ seja invertível, embora A e B não sejam invertíveis.

(c) todas as matrizes A, B e $A + B$ sejam invertíveis.

Nesse último caso, utilize $A^{-1}(A + B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$ para mostrar que $C = B^{-1} + A^{-1}$ também é invertível. Encontre a fórmula de C^{-1}.

18. (a) Quantos elementos podem ser escolhidos de modo independente em uma matriz simétrica de ordem n?

(b) Quantos elementos podem ser escolhidos de modo independente em uma matriz antissimétrica ($K^T = -K$) de ordem n? A diagonal de K é zero!

19. Se A é invertível, quais propriedades de A permanecem verdadeiras para A^{-1}?

(a) A é triangular. (b) A é simétrica. (c) A é tridiagonal. (d) Todos os elementos são números inteiros. (e) Todos os elementos são frações (incluindo-se números como $\frac{3}{1}$).

20. Se $A = L_1D_1U_1$ e $A = L_2D_2U_2$, prove que $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$ e $U_1 = U_2$. Se A é invertível, a fatoração é única.

(a) Desenvolva a equação $L_1^{-1}L_2D_2 = D_1U_1U_2^{-1}$ e explique por que um lado é triangular inferior e o outro é triangular superior.

(b) Compare as diagonais principais e, em seguida, os elementos fora da diagonal.

21. (Importante) Se A possui linha 1 + linha 2 = linha 3, mostre que A não é invertível:

(a) Explique por que $Ax = (1, 0, 0)$ não possui uma solução.

(b) Que lados direitos (b_1, b_2, b_3) podem admitir uma solução para $Ax = b$?

(c) O que acontece com a linha 3 na eliminação?

22. Suponha que A seja invertível e que você troque suas primeiras duas linhas para obter B. A nova matriz B é invertível? Como você poderia encontrar B^{-1} a partir de A^{-1}?

23. (a) Que matriz E provoca o mesmo efeito que as três etapas a seguir: subtrair a linha 1 da linha 2, subtrair a linha 1 da linha 3 e, em seguida, subtrair a linha 2 da linha 3?

(b) Que matriz L provoca o mesmo efeito que as três etapas de reversão a seguir: somar a linha 2 à linha 3, somar a linha 1 à linha 3 e, em seguida, somar a linha 1 à linha 2?

24. (Notável) Se A e B são matrizes quadradas, mostre que $I - BA$ é invertível se $I - AB$ for invertível. Comece com $B(I - AB) = (I - BA)B$.

25. Se o produto $M = ABC$ de três matrizes quadradas for invertível, então A, B e C são invertíveis. Encontre uma fórmula para B^{-1} que envolva M^{-1}, A e C.

26. Encontre os números a e b que fornecem a inversa de 5*eye(4) – ones(4,4):

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}.$$

Que valores assumem a e b na inversa de 6*eye(5) – ones(5,5)?

27. Mostre que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ não possui inversa tentando resolver a coluna (x, y):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{deve incluir} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

28. Multiplique $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Qual é a inversa de cada matriz se $ad \neq bc$?

29. Resolva para as colunas de $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

30. Se A possui coluna 1 + coluna 2 = coluna 3, mostre que A não é invertível:
(a) Encontre uma solução não nula x para $Ax = 0$. A matriz é 3 por 3.
(b) A eliminação mantém a coluna 1 + coluna 2 = coluna 3. Explique por que não há terceiro pivô.

31. Encontre as inversas (diretamente ou a partir da fórmula 2 por 2) de A, B e C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

32. Prove que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

33. Há dezesseis matrizes 2 por 2 cujos elementos são apenas 1 e 0. Quantas delas são invertíveis?

34. Mostre que A = 4*eye(4) – ones(4,4) *não* é invertível: multiplique A*ones(4,1).

Os problemas 35 a 39 abordam o método de Gauss-Jordan para cálculo de A^{-1}.

35. Utilize a eliminação de Gauss-Jordan em $[\, A \;\; I \,]$ para resolver $AA^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. Troque as linhas e continue com o método de Gauss-Jordan para encontrar A^{-1}:

$$[\, A \;\; I \,] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. Siga o exemplo de matriz 3 por 3 do texto, mas com sinal positivo em A. Elimine os pivôs acima e abaixo para reduzir $[\, A \;\; I \,]$ a $[\, I \;\; A^{-1} \,]$:

$$[\, \boldsymbol{A} \;\; \boldsymbol{I} \,] = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

38. Transforme I em A^{-1} reduzindo A a I (por operações de linha):

$$[\, A \;\; I \,] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\, A \;\; I \,] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Inverta essas matrizes A pelo método de Gauss-Jordan começando com $[\, A \;\; I \,]$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

40. Prove que A é invertível se $a \neq 0$ e $a \neq b$ (encontre os pivôs e A^{-1}):

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

41. Verdadeiro ou falso. Se for falso, dê um contraexemplo; se for verdadeiro, justifique:
(a) Uma matriz 4 por 4 com uma linha de zeros não é invertível.
(b) Uma matriz com apenas números 1 abaixo da diagonal principal é invertível.
(c) Se A é invertível, então A^{-1} é invertível.
(d) Se A^{T} é invertível, então A é invertível.

42. Para quais três valores de c a matriz não é invertível? Por quê?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{bmatrix}.$$

43. Utilize inv(S) para inverter a matriz simétrica 4 por 4 do MATLAB S = pascal(4). Crie uma triangular inferior de Pascal A = abs(pascal(4,1)) e teste inv(S) = inv(A')*inv(A).

44. A matriz abaixo tem uma inversa notável. Encontre A^{-1} por eliminação de $[\,A \;\; I\,]$. Estenda para "matrizes alternantes" 5 por 5 e obtenha sua inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

45. M^{-1} mostra a alteração em A^{-1} (um conhecimento útil), se A for subtraída de uma matriz. Verifique o item 3 multiplicando cuidadosamente MM^{-1} para obter I:

1. $M = I - uv^{\mathrm{T}}$ e $M^{-1} = I + uv^{\mathrm{T}}/(1 - v^{\mathrm{T}}u)$.
2. $M = A - uv^{\mathrm{T}}$ e $M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}/(1 - v^{\mathrm{T}}A^{-1}u)$.
3. $M = I - UV$ e $M^{-1} = I_n + U(I_m - VU)^{-1}V$.
4. $M = A - UW^{-1}V$ e $M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

As quatro identidades surgem a partir do bloco 1, 1 ao inverter as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} I & u \\ v^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & u \\ v^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_n & U \\ V & I_m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & U \\ V & W \end{bmatrix}.$$

46. Se A = ones(4,4) e b = rand(4,1), como o MATLAB lhe mostra que $Ax = b$ não possui solução? Se b = ones(4,1), que solução para $Ax = b$ é encontrada por $A\backslash b$?

47. Se B possui as colunas de A na ordem inversa, resolva $(A - B)x = 0$ para mostrar que $A - B$ não é invertível. Um exemplo o levará até x.

48. Encontre e verifique as inversas (assumindo que elas existam) dessas matrizes de blocos:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & D \end{bmatrix}.$$

Os problemas 49 a 55 abordam as regras para matrizes transpostas.

49. (a) A matriz $((AB)^{-1})^{\mathrm{T}}$ surge a partir de $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ e $(B^{-1})^{\mathrm{T}}$. *Em que ordem*?
(b) Se U for triangular superior, então $(U^{-1})^{\mathrm{T}}$ é _______ triangular.

50. Encontre A^{T}, A^{-1}, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ e $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e também para} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

51. Mostre que $A^2 = 0$ é possível, mas $A^{\mathrm{T}}A = 0$ não é possível (a menos que A = matriz nula).

52. Verifique que $(AB)^{\mathrm{T}}$ é igual a $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, mas ambas são diferentes de $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Caso $AB = BA$ (geralmente falso!), como você pode provar que $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$?

53. Explique por que o produto escalar de x e y é igual ao produto escalar de Px e Py. Então, $(Px)^{\mathrm{T}}(Py) = x^{\mathrm{T}}$ diz que $P^{\mathrm{T}}P = I$ para qualquer permutação. Com $x = (1, 2, 3)$ e $y = (1, 4, 2)$, escolha P para mostrar que $(Px)^{\mathrm{T}}y$ nem sempre é igual a $x^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}y)$.

54. (a) O vetor-linha x^{T} vezes A vezes a coluna y produz qual número?

$$x^T Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \_\_\_\_.$$

(b) Isso corresponde à linha $x^{\mathrm{T}}A =$ _______ vezes a coluna $y = (0, 1, 0)$.

(c) Isso corresponde à linha $x^{\mathrm{T}} = [\,0 \;\; 1\,]$ vezes a coluna $Ay =$ _______.

55. Quando você transpuser uma matriz de blocos $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, o resultado será $M^{\mathrm{T}} =$ _______.

Teste isso. Em que condições de A, B, C e D a matriz de blocos é simétrica?

Os problemas 56 a 60 abordam matrizes simétricas e suas fatorações.

56. Fatore essas matrizes simétricas em $A = LDL^{\mathrm{T}}$. A matriz D é diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

57. (a) Quantos elementos de A podem ser escolhidos de modo independente, se $A = A^{\mathrm{T}}$ for 5 por 5?

(b) Como L e D (5 por 5) fornecem o mesmo número de escolhas para LDL^{T}?

58. Se $A = A^{\mathrm{T}}$ e $B = B^{\mathrm{T}}$, quais dessas matrizes são realmente simétricas?

(a) $A^2 - B^2$ (b) $(A + B)(A - B)$ (c) ABA (d) $ABAB$.

59. Se $A = A^{\mathrm{T}}$ precisa de uma troca de linhas, então também precisará de uma troca de colunas para permanecer simétrica. Em linguagem matricial, PA perde a simetria de A, mas ____ recupera a simetria.

60. Suponha que R seja retangular (m por n) e A seja simétrica (m por m).

(a) Transponha $R^{\mathrm{T}}AR$ para mostrar sua simetria. De que forma é a matriz?

(b) Mostre por que $R^{\mathrm{T}}R$ não possui números negativos em suas diagonais.

Os três problemas a seguir abordam aplicações de $(Ax)^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$.

61. A produção de x_1 caminhões e x_2 aviões exige $x_1 + 50x_2$ toneladas de aço, $40x_1 + 1.000x_2$ libras de borracha e $2x_1 + 50x_2$ meses de trabalho. Se os custos unitários y_1, y_2 e y_3 são de \$ 700 por tonelada, \$ 3 por libra e \$ 3.000 por mês, quais são os valores de um caminhão e um avião? Estes são os componentes de $A^{\mathrm{T}}y$.

62. Cabos conduzem energia entre Boston, Chicago e Seattle. Essas cidades possuem voltagens x_B, x_C e x_S. Com as resistências unitárias entre as cidades, as três correntes são em y:

$$y = Ax \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} y_{BC} \\ y_{CS} \\ y_{BS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_C \\ x_S \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre as correntes totais $A^{\mathrm{T}}y$ dessas três cidades.

(b) Verifique que $(Ax)^{\mathrm{T}}y$ corresponde a $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$ – seis termos de ambas.

63. Prove que nenhum reordenamento de linhas e de colunas é capaz de transpor uma matriz típica.

64. Compare tic; inv(A); toc para A = rand(500) e A = rand(1.000). A contagem n^3 diz que o cálculo de tempo (medido por tic; toc) deveria ser multiplicado por 8, se n for dobrado. Você espera que essa matriz aleatória A seja inversível?

65. Mostre que L^{-1} possui elementos j/i para $i \le j$ (a matriz $-1, 2, -1$ possui a seguinte L):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Teste esse padrão para L = eye(5) – diag(1:5)\diag(1:4, –1) e inv(L).

66. Um *grupo* de matrizes inclui AB e A^{-1} se incluir A e B. "Produtos e inversas ficam no mesmo grupo." Quais das seguintes etapas são grupos? Matrizes triangulares inferiores L com apenas números 1 na diagonal, matrizes simétricas S, matrizes positivas M, matrizes inversíveis diagonais D, matrizes de permutação P. Crie mais dois grupos de matrizes.

67. I = eye(1.000); A = rand(1.000); B = triu(A); produz uma matriz *triangular* aleatória B. Compare os tempos de inv(B) e B\$I$. A barra invertida é programada para utilizar os zeros em B, ao passo que inv utiliza os zeros em I ao reduzir $[B \ \ I]$ por Gauss-Jordan (compare também com inv(A) e A\$I$ para a matriz completa A).

68. Abaixo, segue uma nova fatoração de A em *triangular vezes simétrica*:

Comece a partir de $A = LDU$. Assim, A é igual a $L(U^{\mathrm{T}})^{-1}$ vezes $U^{\mathrm{T}}DU$.

Por que $L(U^{\mathrm{T}})^{-1}$ é triangular? Sua diagonal possui apenas números 1. Por que $U^{\mathrm{T}}DU$ é simétrica?

69. Uma ***matriz noroeste*** quadrada B é nula no canto sudeste, abaixo da diagonal secundária que vai de $(1, n)$ a $(n, 1)$. B^{T} e B^2 serão matrizes noroestes? B^{-1} será noroeste ou sudeste? Qual é o formato de BC = ***noroeste vezes sudeste***? Você pode combinar permutações com as L e U usuais (sudoeste e nordeste).

70. Ax fornece as quantidades de ferro, borracha e mão de obra para produzir x no problema 61. Encontre A. Então, $(Ax)^{\mathrm{T}}y$ será _______ de insumos, enquanto $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$ será o valor de _______.

71. Se cada linha de uma matriz 4 por 4 contiver os números 0, 1, 2, 3 em alguma ordem, a matriz pode ser simétrica? Pode ser invertível?